电路理论复习资料

By Douyachan

基本概念

《电路理论》在研究什么？

如果大家高中时选了物理，或者对初中物理知识记忆犹新，那么你一定对电学不陌生。欧姆定律、串联分压、并联分流等你一定张口就来。但是，如果遇到连接比较复杂的电路连接方式（中学时称之为混联），或者一些高级的电压源、电流源等元件，你可能用中学知识无从下手。而这门课程就是教给你了很多分析电路的方法，让你能游刃有余地求解电压、电流、功率。

所以你在学习的，仍然只是**怎么求电压、电流、功率**罢了。首先，这本书对研究的电路做了一些理想化处理，比如忽略导线、电源、线圈的内阻，以及我们研究的电路都是：

> **集中参数电路**：电路的尺寸d远小于电磁波波长λ的电路，即
>
> $$d << \lambda$$
>
> 通常认为差十倍以上就可以了。

无状态的（与时间无关）的电路称为电阻电路。有状态的、与时间有关的电路称为**动态电路**。动态电路可以用**时域法**求解，也可用**S域**法简化求解。特别地，当电源是频率恒定的正弦信号时（如家用交流电），则可以用**相量域**进一步简化计算；更特别的，对于**对称三相电路**，我们还有专门的研究方法，更进一步简化。

电路变量：电压、电流和功率

为了避免歧义，我们研究电路变量时都要选择**参考方向**。这就像研究运动学问题时规定正方向类似，**参考方向规定了电流/电压朝哪个方向是正的**。电流和电压的实际方向不会因为参考方向的选择而变化。

电压

电压是两点的电势差（电位差）。正电压的方向由高点位指向低电位。

电流

电流是单位时间流过导体的电荷量。电流的方向为正电荷定向移动的方向。

关联参考方向

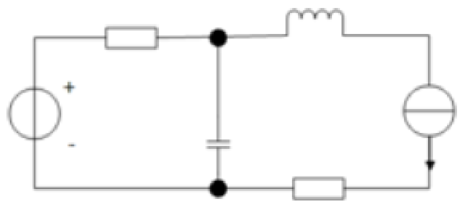
我们喜欢把电压和电流参考方向设定为**一致**的，即电压由“+”→“-”的参考方向和电流的参考方向相同。这也意味着，在关联参考方向下，对于正电阻元件，电压和电流值永远是同号的；对于电源如果采用了关联参考方向，那么电压和电流值符号就是相反的了。

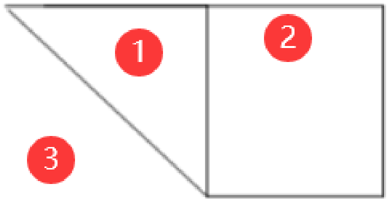
功率

仍然是中学的公式，P=UI。但是你会发现，功率有正有负。假如你用的是关联参考方向，那么正电阻的功率是正的，表示消耗电能；电源的功率是负的，说明在释放电能。

图论基础知识

电路中每一个元件都可看作一条**支路**，元件之间的导线可看作一个**节点**。因此，电路可以用数据结构中的“图”来表示（tp到nnl的数据结构笔记）





回路

图中由节点和支路构成的一个圈圈称为一条回路。特别的，如果这个圈圈没有圈起其他东西的话，就称为**网孔**。上图中包含三个回路：1，2，以及最外面一圈3。其中1和2是网孔。

树

没有回路的连通图称为树。对于图内指定的一棵树来说，其包括的支路称为树支，没被包括在内的支路称为连支。

割集

用刀在图上切一个圈，使得图被分割成两部分（圈内圈外都有节点）。刀砍断的支路称为割集。

结论

在n个节点、b条支路的连通图G中，任意选定一棵树，则
可定义：
基本割集：只包含一个树支的割集。
基本回路：只包含一个连支的回路；
以及有这些结论：

> $\text{基本割集数} = \text{树支数} = n - 1$ （回忆肽链中肽键数的计算）
> $\text{基本回路数} = \text{连支数} = b - (n - 1)$

电阻电路的计算

电路的计算主要考虑元件约束和拓扑约束，联立方程求解。

元件约束

电阻

欧姆定律$U = IR$ 或 $I = GU$

其中R为电阻值，单位为欧姆（Ω）；G称为电导值，单位为西门子（S）。

我们还会研究R<0的理想元件，称为负电阻。不过很明显为了满足能量守恒，他是需要外界供电的。

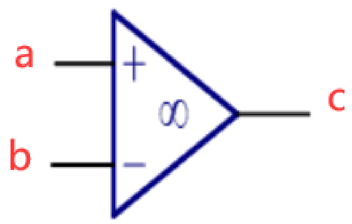
电源

电源分为独立电源和受控电源。

- 圆形的为独立电源；图中内部的线平行于导线的是电压源；垂直于导线的是电流源。作用是提供稳定的电压或电流。
- 菱形的是受控电源；内部的线平行于导线的是电压源；垂直于导线的是电流源。其电压电流值会根据一定的公式变化。具体公式会标在图上。

运算放大器

电路分析中常用理想运放（需要外界供电）：

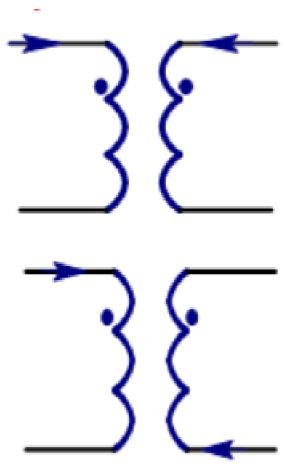


有以下两个特性：

> **虚短**：a、b之间如同短路，电位相等。
> **虚断**：a、b之间如同断路，电流为0。
> 注意，他是虚短虚断，并不是真的短路、断路，而是内部的结构使其拥有这个性质，因此是需要外部供电的，只是图里一般省略了供电的线。

理想变压器

非常理想，没有铁损、铜损，交流直流都能用。



线圈旁的小点标志了线圈的方向。设左侧为u1、i1，右侧为u2、i2，匝数比为1:n。

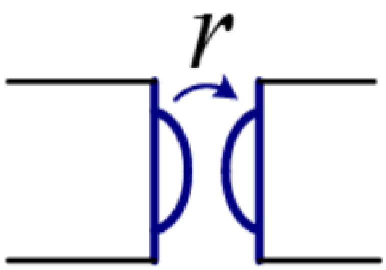
电流从同方向（同名端）流入时满足：

$$\begin{cases} u_2 = nu_1 \\ i_2 = -\dfrac{1}{n}i_1 \end{cases}$$

电流从不同方向（异名端）流入时满足：

$$\begin{cases} u_2 = -nu_1 \\ i_2 = \dfrac{1}{n}i_1 \end{cases}$$

回转器



设左侧为u1、i1，右侧为u2、i2，回转比为r，满足：

$$\begin{cases} u_1 = -ri_2 \\ u_2 = ri_1 \end{cases}$$

拓扑约束

基尔霍夫电流定律（Kirchhoff Current Laws，KCL）

对于电路的一个**节点**，$\sum 流入电流 = \sum 流出电流$，或者以电流流出为参考方向，则 $\sum 电流 = 0$

基尔霍夫电压定律（Kirchhoff Voltage Laws，KVL）

对于电路的一个**回路**，沿着某一方向走一圈，一路上$\sum 电压降 = \sum 电压升$，或者以电压降低为参考方向，则$\sum 电压 = 0$

求解

2b法

在n个节点、b个元件构成的电路中，我们一共需要解2b个未知量（每个元件的电压、电流）。而我们有多少个方程呢？

- b个元件约束方程；
- (n-1)个节点的KCL方程；
- b-(n-1)个网孔的KVL方程
  加起来刚好2b个，而且是相互独立的！因此，电流中的所有未知量都能解出来了！
  缺点：方程太多，人类不好解

节点法

节点法和网孔法都引入了中间变量减少方程数量，最后可轻易导出你想要的电压电流值。
将n个节点中任意一个节点电位设为零，其余n-1个电位设为**节点电压**，再分别以这些节点为研究对象，列写KCL方程，解出节点电压。还可以把研究对象拓展为割集。

列写KCL方程时支路电压用节点电压来表示。

此外还可用自电导、互电导来使列式简单一些，但是不易速通且易错，不如直接列KCL，所以就不讲了。

网孔法

为b-(n-1)个网孔设定一个**网孔电流**（按顺时针/逆时针方向），再分别以这些网孔作为研究对象，列KVL方程。还可以把研究对象拓展为回路。

列写KVL方程时，支路电流是网孔电流在此处叠加的值。

此外还可用自电阻、互电导来使列式简单一些，但是不易速通且易错，不如直接列KVL，所以就不讲了。

等效法

普通的等效电路

> - 电**压**源**串**联 ~ $U_s = U_{s1} + U_{s2}$
> - 电**流**源**并**联 ~ $I_s = I_{s1} + I_{s2}$
> - 电阻串联 ~ $R = R_1 + R_2 + ...$
> - 电阻并联 ~ $R = \dfrac{1}{\frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2} + ...}$
> - 电压源与电阻并联 ~ $U_s' = U_s$
> - 电流源与电阻串联 ~ $I_s' = I_s$

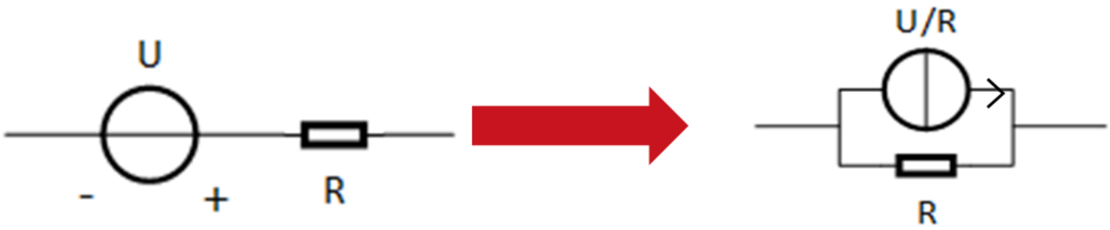
戴维南等效和诺顿等效

> **戴维南定理**：**线性含源一端口**电路，可等效成一个电压源和电阻的串联。
> **诺顿定理**：**线性含源一端口**电路，可等效成一个电流源和电阻的并联。

对于戴维南和诺顿电路，我们都可以求出：

> **开路电压**：端口接电压表（断路）的电压；
> **短路电流**：端口接电流表（短路）的电流。
> **等效电阻**：电路内部所有**独立电源**置为0（$U_s = 0; I_s = 0$）直接求出等效电阻；或
> $\text{等效电阻} = \dfrac{\text{开路电压}}{\text{短路电流}}$

戴维南等效电路中，电压源电压为原电路的开路电压，串联的电阻值为原电路的等效电阻；
诺顿等效电路中，电流源电流为原电路的短路电流，并联的电阻值为原电路的等效电阻。



戴维南和诺顿电路可以相互转化。等效电阻大小不变；电源的值根据$U_s = I_s R_{eq}$和$I_s = \dfrac{U_s}{R_{eq}}$计算得到。

注意！不同于关联参考方向，转换前后电压源的正极和电流源的正方向指向相同！

置换法

对于**电路变量确定的某一电路**，可用电压为U的电压源代替已知电压为U的一部分电路；或者用电流为I的电流源代替电流为I的一部分电路来求解。

电路性质

齐次性、叠加性

> **齐次性**：当输入为原输入的K倍，则输出也为原输出的K倍
> **叠加性**：多个电源的作用，响应为各个电源单独作用产生的响应之和

特勒根定理

特勒根定理分为特勒根功率定理和特勒根似功率定理。

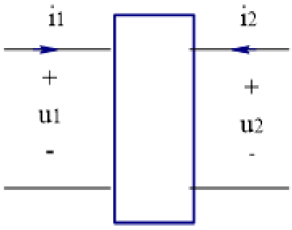
> 特勒根功率定理：
>
> $$\sum_{\text{支路}k} u_k i_k = 0$$
>
> 特勒根似功率定理：
>
> $$\sum_{\text{支路}k} u_k i'_k = 0$$
>
> $$\sum_{\text{支路}k} u'_k i_k = 0$$
>
> 其中u_k, i_k和u'_k, i'_k可能是**同一电路不同时刻**或**相同结构不同电路元件**的两组电压电流。

互易定理

互易定理是特勒根定理的推论。

> 对于上图所示的两个**纯电阻**二端口网络，
>
> $$U_1 I_1' + U_2 I_2' = U_1' I_1 + U_2' I_2$$

二端口网络分析



像这样的电路叫做二端口网络。她有四个参数——u_1, u_2, i_1, i_2。我们可以用其中两个作为自变量来表示其余两个参数，共有$C_4^2 = 6$种表示方式。

模型	方程形式	参数矩阵	求解方法
流控	$\boldsymbol{U} = \boldsymbol{RI} + \begin{pmatrix} U_{oc_1} \\ U_{oc_2} \end{pmatrix}$	$\boldsymbol{R} = \begin{pmatrix} R_{11} & R_{12} \\ R_{21} & R_{22} \end{pmatrix}$	加电流源
压控	$\boldsymbol{I} = \boldsymbol{GU} + \begin{pmatrix} I_{sc_1} \\ I_{sc_2} \end{pmatrix}$	$\boldsymbol{G} = \begin{pmatrix} G_{11} & G_{12} \\ G_{21} & G_{22} \end{pmatrix}$	加电压源
混合I	$\begin{cases} u_1 = H_{11} i_1 + H_{12} u_2 + U_{oc1} \\ i_2 = H_{21} i_1 + H_{22} u_2 + I_{sc2} \end{cases}$	$\boldsymbol{H} = \begin{pmatrix} H_{11} & H_{12} \\ H_{21} & H_{22} \end{pmatrix}$	-
混合II	$\begin{cases} i_1 = H_{11}' u_1 + H_{12}' i_2 + I_{sc1} \\ u_2 = H_{21}' u_1 + H_{22}' i_2 + U_{oc2} \end{cases}$	$\boldsymbol{H}' = \begin{pmatrix} H_{11}' & H_{12}' \\ H_{21}' & H_{22}' \end{pmatrix}$ (又称$\hat{H}$)	-
传输I (不含独立源)	$\begin{cases} u_1 = T_{11} u_2 + T_{12}(-i_2) \\ i_1 = T_{21} u_2 + T_{22}(-i_2) \end{cases}$	$\boldsymbol{T} = \begin{pmatrix} T_{11} & T_{12} \\ T_{21} & T_{22} \end{pmatrix}$ (又称~~Aestr~~参数)	-
传输II (不含独立源)	$\begin{cases} u_2 = T_{11}' u_1 + T_{12}'(-i_1) \\ i_2 = T_{21}' u_1 + T_{22}'(-i_1) \end{cases}$	$\boldsymbol{T}' = \begin{pmatrix} T_{11}' & T_{12}' \\ T_{21}' & T_{22}' \end{pmatrix}$ (又称$\hat{A}$)	-

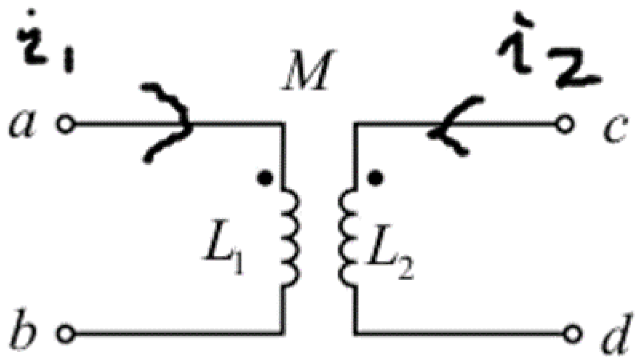
动态电路的时域分析

终于来到了新的一章——动态电路！这一章由于**电容**和**电感**的加入，使得电路有了状态，ie电路变量和时间有关了。

动态元件

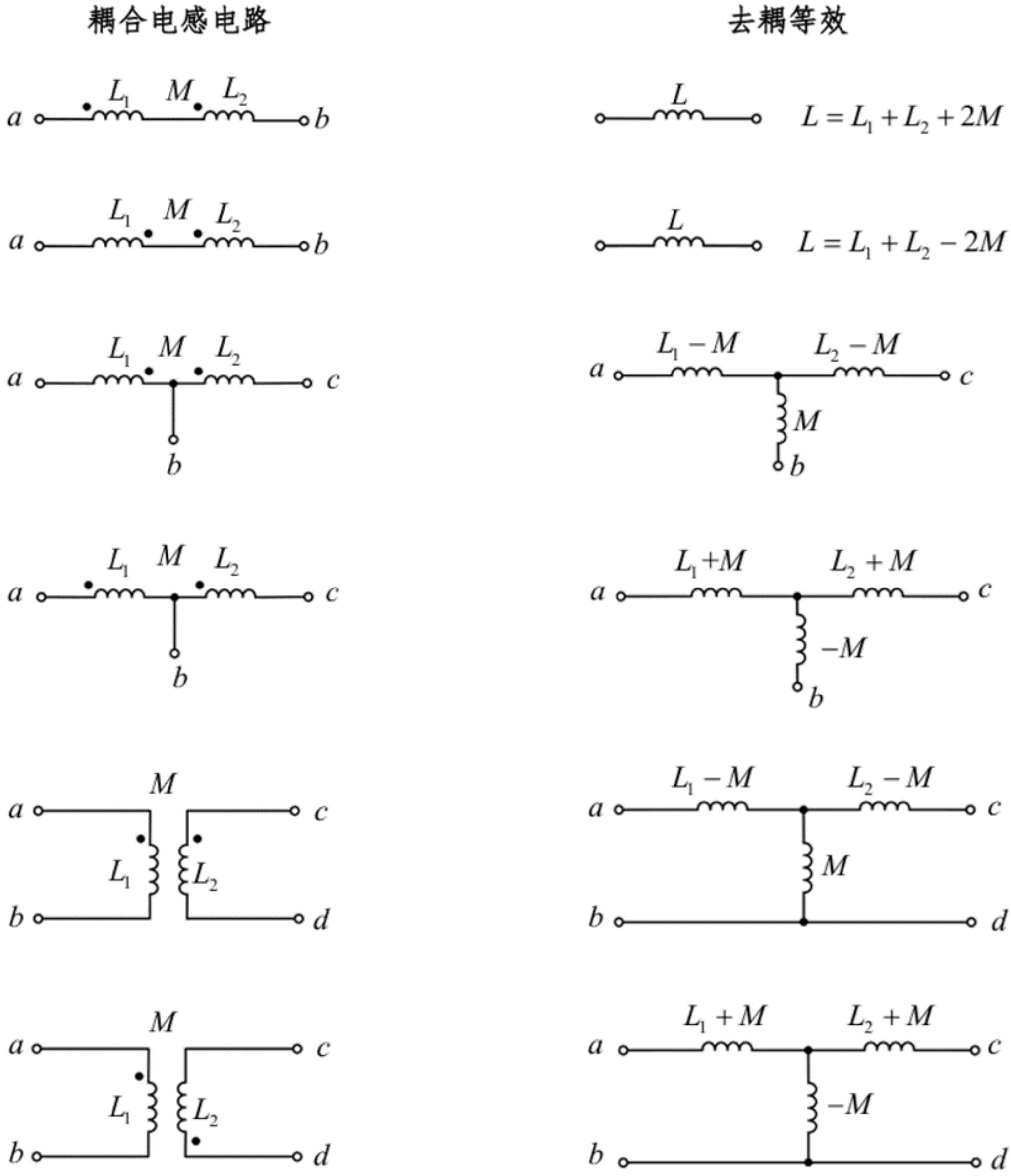
动态元件	伏安特性	储能
电容	$i=C\frac{\mathrm{d}u(t)}{\mathrm{d}t}$	$W=\frac{1}{2}Cu^2(t)$
电感	$u=L\frac{\mathrm{d}i(t)}{\mathrm{d}t}$	$W=\frac{1}{2}Li^2(t)$

电感由于和磁感线有关，所以当两个电感靠近时会有互感的影响，称为电感的耦合。电感线圈图示上会标注“同名端”（*）。若**两个电感电流从同名端流入/出**，则互电感$M>0$，否则$M<0$.



> 上图中两个电流从同名端流入的电感自电感分别为L_1、L_2，互电感为M。则：
>
> $$u_1=L_1\frac{\mathrm{d}i_1}{\mathrm{d}t}+M\frac{\mathrm{d}i_2}{\mathrm{d}t}$$
> $$u_2=L_2\frac{\mathrm{d}i_2}{\mathrm{d}t}+M\frac{\mathrm{d}i_1}{\mathrm{d}t}$$

由此可推出几种耦合电感的等效（我们称之为“去耦”等效）的方式：



解动态电路

只有一个动态元件的电路是一阶动态电路。当然这句话很好抬杠——比如两个电容并联可等效成一个，或者两个电感串联可以等效成一个，或者有的动态元件根本没接入电路等等——总之你只要知道大概的意思就好了。因为高阶微分方程很难解，所以时域法顶多研究个一阶电路就行了，再高阶的就用s域来做吧。

响应的分类

你在电路中测得的电压、电流都可以叫“响应”。响应可以用交叉分类法，分为零输入和零状态，或者固有和强迫，或者稳态和暂态，这三种分类方式。

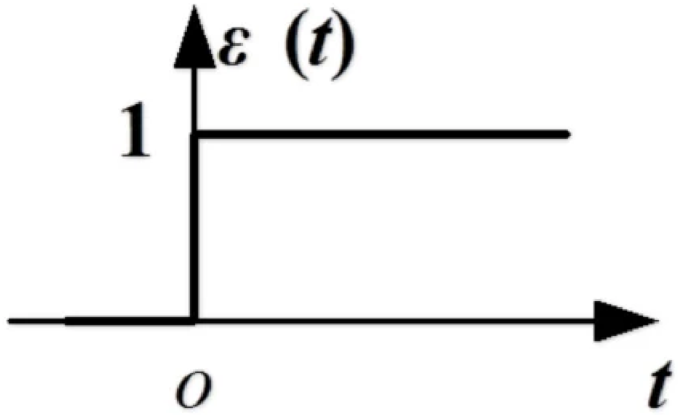
- **零输入响应**即所有外接电源为0求出的响应；**零状态响应**即所有动态元件都没有初始状态时求出的响应。
- **固有响应**为响应中的齐次解；**强迫响应**为响应中的通解。
- **稳态响应**为响应中不随时间变化的项；**暂态响应**为响应中随时间衰减的部分。

此外，还有两种特殊的响应：**阶跃响应**和**冲激响应**。

阶跃响应和冲激响应

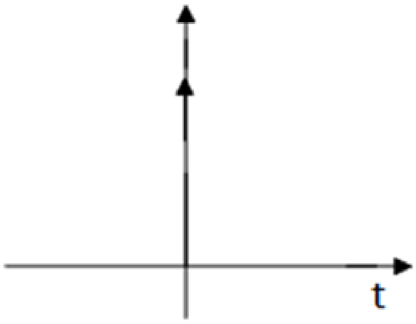
首先，让我们了解阶跃函数和冲激函数。这两个函数都在数学上难以理解，但是在电路里很常用。

阶跃函数：$\varepsilon(t)=\begin{cases}1 & ,t>0\\0 & ,t<0\end{cases}$



~~我一直觉得期末考试不要开根乘十了，用阶跃函数来curve多好。~~

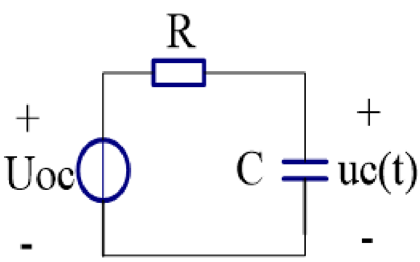
冲激函数：$\delta(t)=\varepsilon'(t)$



单位阶跃响应$s(t)$是电源为阶跃函数的零状态响应；**单位冲激响应**$h(t)$是电源为冲激函数的零状态响应。可以证明，$h(t)=s'(t)$. 因此我们可用单位阶跃响应来间接求单位冲激响应。

微分方程法

对于一阶动态电路，我们的解题通法就是：把那个唯一的动态元件之外的电路进行戴维南等效。这样你就把他都化为了结构非常简单的RC串联电路或RL串联电路。

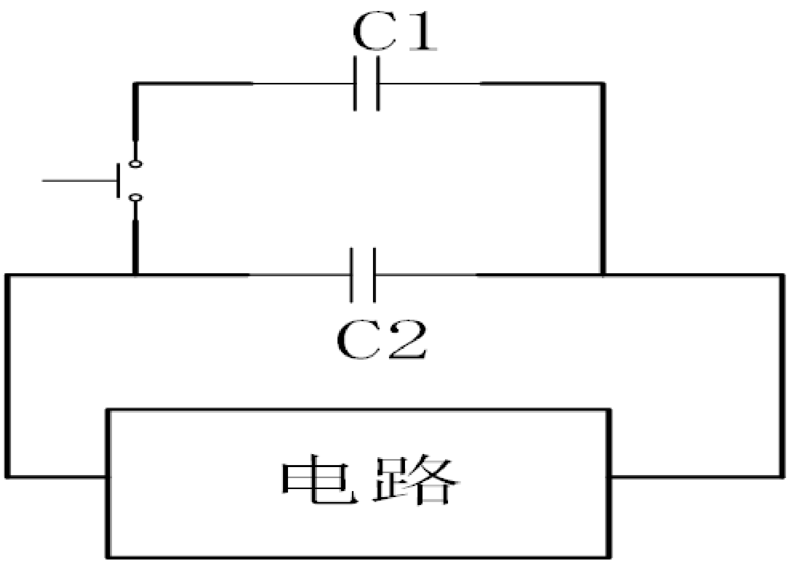


你就可以列微分方程来求解了（以电容为例）：

$$U_{oc}=RC\frac{\mathrm{d}u_c}{\mathrm{d}t}+u_c$$

注意：**有初始状态的电容可以先等效为电压源和无初始状态电容的串联，有初始状态的电感可以先等效为电流源和无初始状态电感的并联。**

电路从$-\infty$时刻开始作用，在$t=0^-$时刻，已达到旧电路的稳态。此时进行“换路”，（往往是通过操作开关的方式）使电路发生变化。我们一般要解的是$t>0^+$的响应，那么就需要给新旧电路建立联系，即明确$t=0^+$和0^-之间有什么关系。一般来说，**电容电压和电感电流**在换路前后**保持不变**。只有在存在**纯电容回路**和**纯电感割集**时电容电压和电感电流会发生**跳变**，因为要先保证KVL和KCL。



e.g. 上图开关闭合前，$U_{C1} \neq U_{C2}$。假如开关闭合后电容电压仍不变，那么上面两个并联电容所在电路就不满足KVL了，物理学的大厦就此崩塌。所以，电压肯定会突变，而且突变到他们俩相等。

三要素法

我们通过微分方程法解了不少题后发现，解的形态其实都是类似的。那么我们能不能根据解的形态归纳出一个更简单的求解一阶电路响应方法呢？这就是三要素法。

> 要求：直流电源，一阶动态电路，t>0.
> 结论：
> $$y(t) = \big(y(0^+) - y(+\infty)\big)\, e^{-\frac{t}{\tau}} + y(+\infty)$$
> 上式中的y可代表电路中**任意部分的电压或电流。**

具体的求解步骤：

- 用电压为$u_C(0^+)$的电压源替代电路中的电容（用电流为$i_L(0^+)$的电流源替代电路中的电感），求出相应的$y(0^+)$.
- 将电容断路/电感短路，求得对应的$y(+\infty)$
- 求出电路的时间常数$\tau = \begin{cases} RC & (\text{电容}) \\ \frac{L}{R} & (\text{电感}) \end{cases}$
- 用上述公式写出答案。

太快了！

动态电路的复频域分析

这一章，我们的电路研究对象切换到了复频域（s域），而非时域（t域）。我们可把电路转化为s域的运算电路，其中的各个电路变量的自变量是s，s是什么意义呢？没什么意义。但是，由于拉氏变换的特性，使得微分运算可被消掉，所以在运算电路中，电容、电感、电阻可被统一，也就避免了解微分方程的过程。

此外，s域求解还有以下好处：

- 可求出各种响应。对于任意输入信号，任意阶动态电路，都可以求。在时域中我们害怕的二阶、三阶、n阶，以及阶跃输入、冲激输入，都可以轻易解决。
- 无须在意换路过程。下面所有的内容都可以从$t=0^-$开始直接算，而不用管$t=0^- \to 0^+$的过程中发生了什么。

Laplace变换（拉氏变换）

通过将t域($t \geq 0$)的函数$f(t)$进行Laplace变换，就可以将其转化为s域的**象函数**$F(s)=\mathscr{L}[f(t)]$；
对s域的函数$F(s)$进行Laplace反变换，就可以将其从s域转化回t域$f(t)=\mathscr{L}^{-1}[f(t)]$。

常用拉氏变换

常用函数的拉氏变换可以查下表：
(原函数自变量都满足$t \geq 0$，也就等价于其乘上$\varepsilon(t)$，下表也就不写$\text{原式} \cdot \varepsilon(t)$了)

原函数$f(t)$	**象函数**$F(s)$
$\delta(t)$	1
$\delta^{(n)}(t)$	s^n
1	$\frac{1}{s}$
t	$\frac{1}{s^2}$
$\frac{t^n}{n!}$	$\frac{1}{s^{n+1}}$
$\sin(\omega t)$	$\frac{\omega}{s^2+\omega^2}$
$\cos(\omega t)$	$\frac{s}{s^2+\omega^2}$

拉氏变换的性质

性质	**公式**
线性	$\mathscr{L}\left[K_1 f_1(t)+K_2 f_2(t)\right]=K_1 F_1(s)+K_2 F_2(s)$
微分	$\mathscr{L}\left[\frac{\mathrm{d} f(t)}{\mathrm{d} t}\right]=s F(s)-f\left(0^{-}\right)$
积分	$\mathscr{L}\left[\int_{0^{-}}^{+\infty} f(\xi) \mathrm{d} \xi\right]=\frac{1}{s} F(s)$
时移	$\mathscr{L}\left[f\left(t-t_0\right)\right]=e^{-s t_0} F(s)$
频移	$\mathscr{L}\left[\mathrm{e}^{a t} f(t)\right]=F(s-a)$
初值	$f\left(0^{+}\right)=\lim\limits_{s \rightarrow+\infty} s F(s)$
终值	$f(+\infty)=\lim\limits_{s \rightarrow 0} s F(s)$

s域下的拓扑约束、元件约束

拓扑约束：**KCL、KVL**在s域下**依然适用。**

元件约束：

元件	**元件约束**
电阻	$u(s)=R i(s)$
电容(零状态)	$u(s)=\frac{1}{s C} i(s)$
电感(零状态)	$u(s)=s L i(s)$
电源	原参数作拉氏变换

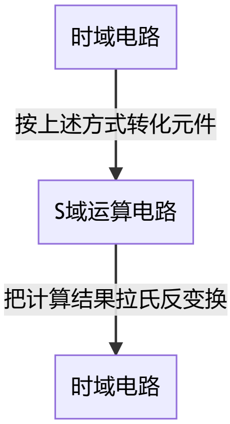
由上式可发现，s域中电阻、电容、电感的类似“欧姆定律”的公式形式都是一样的。我们不妨引入一个概念叫“运算阻抗”：

$$Z = \frac{U(s)}{I(s)}$$

$$Z_{电阻} = R; Z_{电容} = \frac{1}{sC}; Z_{电感} = sL$$

复频域下求解电路

学会了上述过程，我们就可以用s域来求解电路了！过程大致如下：



1. 我们先对时域电路进行预处理。比如若动态元件有初始状态，则先按照上面“微分方程法”章节中所说，把有初始状态的电容先等效为电压源和无初始状态电容的串联，有初始状态的电感先等效为电流源和无初始状态电感的并联。耦合电感先去耦。
2. 画出对应的运算电路。现在电路中的元件应该都可以按照上表来从时域转化到s域了。对于电源，无论是独立源还是受控源，都将其电压（电流）值拉氏变换到s域中；其余的电阻、电容、电感都可以等效为运算阻抗元件。
3. 在运算电路中求解。求解方法和电阻电路一样，你依然可以用节点法、网孔法等，因为电容电感和电阻都等效为电阻了，所以比较好求。
4. 此时你得到的结果（电压、电流等）还需要从s域拉氏反变换回时域。方法依然是查表。不要记定义，记上面的拉氏变换表。

正弦稳态电路分析（相量域）

220V 50Hz的家用电是一种正弦电压。针对正弦电压作用下的**稳态响应**（即不随时间衰减的稳定存在的部分），先辈们提出了更方便的电路研究方式：**相量**。

在此之前，你需要知道的复数运算知识

1. 欧拉公式：

$$e^{j\theta} = \cos\theta + j\sin\theta$$

由于电路中i表示电流，所以用j表示虚数单位。并且我们常用$\underline{/\theta}$来简写$e^{j\theta}$。

2. $\mathrm{Re}(\dot{A})$是对复数$\dot{A}$取实部；$\mathrm{Im}(\dot{A})$是对复数$\dot{A}$取虚部。

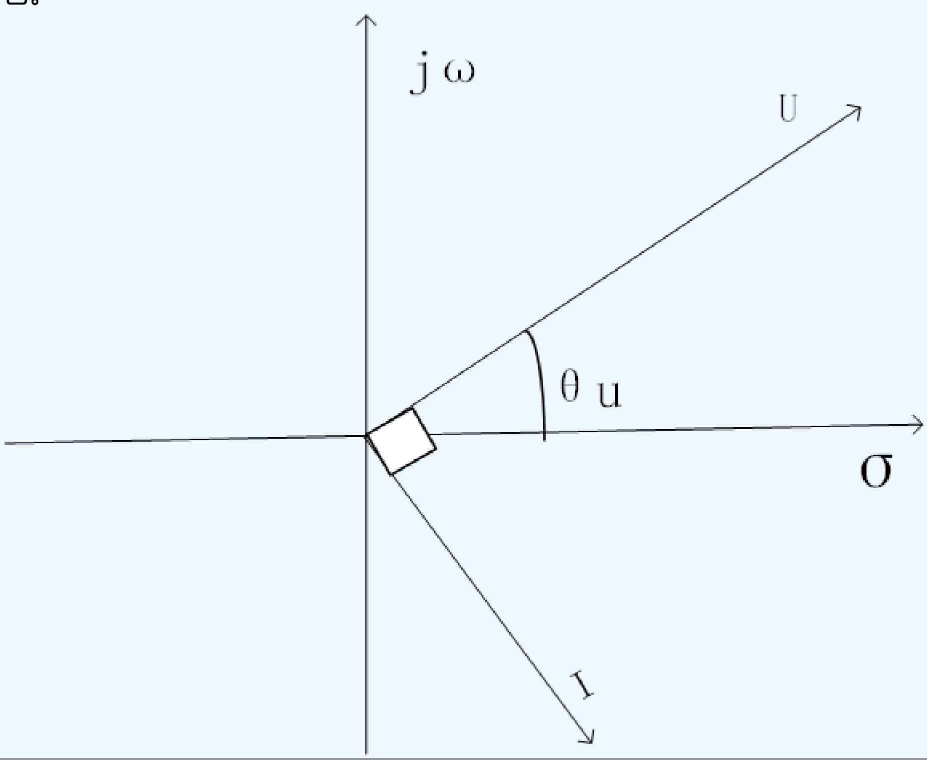
3. 复数乘除：

$$\dot{A}\dot{B} = |A||B|\underline{/\theta_A + \theta_B}$$
$$\frac{\dot{A}}{\dot{B}} = \frac{|A|}{|B|}\underline{/\theta_A - \theta_B}$$

4. 复数共轭

$$\dot{A} = a + bj \iff \bar{\dot{A}} = a - bj$$

5. 相量图
相量（复数）可以被画成平面直角坐标系里的向量。实部为其横坐标，虚部为其纵坐标。由上述的知识3可以看出，复数乘除实则对应向量模长的变化、角度的增减。所以两个相量相比，幅角比较大的可以叫“超前”于另一个相量，另一个则“滞后”于它。



正弦量的相量表示

正弦电路中的电路变量（电压、电流）等都是正弦量，对于一个可以写成

$$x = X_m cos(\omega t + \varphi)$$

的正弦量，我们可用一个复数（称为相量）来表示：

$$\dot{X}_m = X_m\underline{/\varphi}$$

这个复数中完整地包含了其真实值的大小、初相位信息。但是频率信息(ω)丢失了，因为**同一个电路中所有元件频率都相同**，所以无需特别记录。因此，上面的表示是可以完备地表示这个电路变量的。

我们再回忆高中知识：X_m是**最大值**，又称峰值；在这个交流电压作用下的电阻平均功率等于某一直流电压作用下的平均功率，这一电压称为**有效值**，或叫均方根值（rms），大小为峰值的$\frac{\sqrt{2}}{2}$倍。上述相量是最大值相量，但是更常用的是

> **有效值相量**：
>
> $$\dot{X} = X\underline{/\varphi} \quad \text{其中} X = \frac{\sqrt{2}}{2}X_m$$
>
> 有效值相量的**模长**即为真实数据的**有效值**；**幅角**则是真实数据的**初相位**。

相量域中求解电容、电压

我们下面就要研究电路中所有元件的电压相量、电流相量，也就是研究相量域下的电路。

在相量域下，依然是有着线性性、KCL、KVL的。所以你还是可以当电阻电路来研究，这和s域有着异曲同工之妙。

相量域中，电阻、电容、电感再一次被统一为**阻抗**。他们的元件约束都可写成

$$\dot{U} = Z\dot{I}$$

下表给出了各个元件的电压电流关系。

元件	元件约束	UI幅角关系	阻抗$Z = \frac{\dot{U}}{\dot{I}}$
电阻	$\dot{U} = R\dot{I}$	U和I幅角相同	R (实数)
电容	$\dot{U} = \frac{1}{j\omega C}\dot{I}$	U比I滞后90°	$\frac{1}{j\omega C}$ (负虚数)
电感	$\dot{U} = j\omega L\dot{I}$	U比I超前90°	$j\omega L$ (正虚数)

一堆元件串并联在一起形成单口网络，阻抗**虚部>0**则为感性元件；阻抗**虚部<0**则为容性元件。

有了这些知识，你就可以想求啥求啥了，非常方便。

相量域中的功率

你想求功率。你把$\dot{U}\dot{I}$直接乘起来，发现得到的是复数，不可能存在在现实世界中。你改成乘他们的模长，发现也不对：电容电感怎么会消耗功率呢？所以我们引入了复功率。

> 复功率
>
> $$\dot{S} = \dot{U}\bar{\dot{I}} = UI\underline{/\theta_U - \theta_I}$$
>
> 注意I需要求共轭。

由上述的复数除法知识可知，$\underline{/\theta_U - \theta_I}$实际上就是阻抗的幅角（阻抗角）$\underline{/\theta_Z}$。我们把$\lambda = \cos\theta_Z$称作功率因数。

有功功率是复功率的实部，是电路真实消耗的功率。**只有电阻会消耗有功功率**。符号是P，单位是W（瓦）。**功率表**（瓦特计）读出的就是有功功率。

$$P = \mathrm{Re}(\dot{S}) = UI\cos\theta_Z = I^2\mathrm{Re}(Z)$$

无功功率是复功率的虚部，并不是真实的功率，是**电容和电感**造成的。符号是Q，单位是Var（乏）。

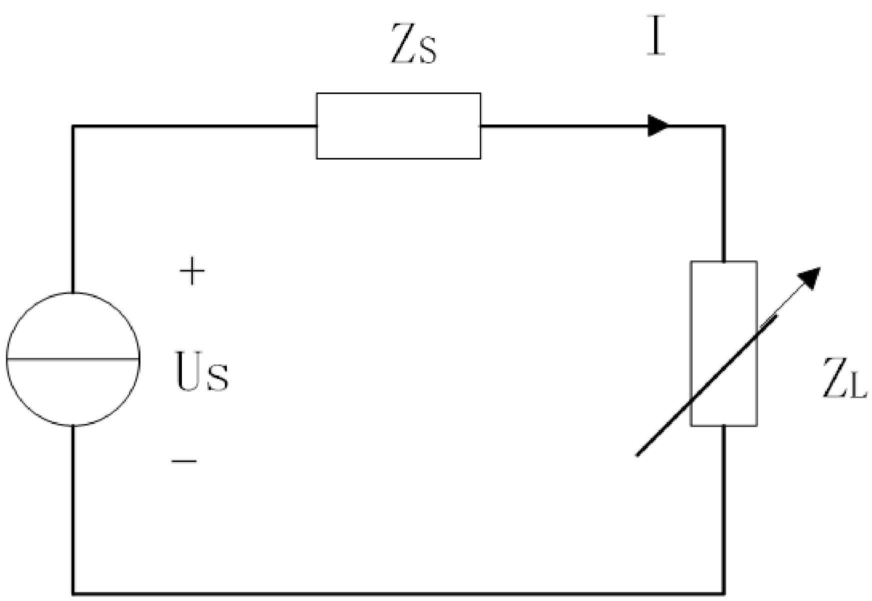
$$Q = \mathrm{Im}(\dot{S}) = UI\cos\theta_Z = I^2\mathrm{Im}(Z)$$

表观功率是复功率的模长，并不是真实的功率。但是直接把电压表和电流表的度数相乘得到的是表观功率。其符号是S，单位是VA（伏安）。

$$S = |\dot{S}| = UI = P^2 + Q^2$$

此外，还有个用相量图求有功功率的小窍门。有功功率大小是$UI\cos\theta_Z$，长得很像点乘。所以你在相量图里画出U和I向量，进行**数量积**运算即可得到有功功率。

最大功率传输



我们经常要考虑一个元件何时取最大功率。我们先把电路其他部分进行戴维南等效。现在变成一个电源、一个固定电阻Z_s、一个可变电阻Z_L了。

- 当**Zs可任意变化**时，$Z_s = \bar{Z}_L \iff P_L$最大。此结论**也适用于电阻电路**（实数的共轭是他本身）。
- 当**Zs幅度可变，但阻抗角固定**时，$|Z_s| = |Z_L| \iff P_L$最大。

电路的频率响应

我们有时会研究，在电路的输入频率不同时，输出结果有什么不同。这就是电路的频率响应。

对于一个二端口网络，左侧输入的电压记为$\dot{X}$，右侧响应的电压记为$\dot{Y}$。则频率响应函数：

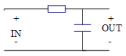
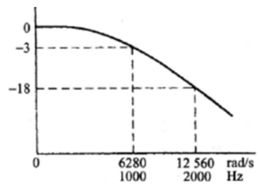
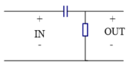
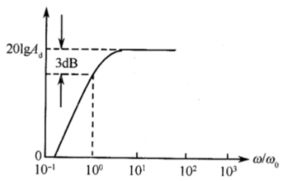
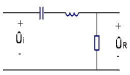
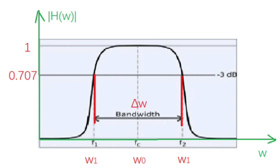
$$H(j\omega)=\frac{\dot{Y}}{\dot{X}}$$

其得到的是相量。
我们对其取模长则称为**幅频特性**，其表示的是输出电压和输入电压大小的比值随频率的变化关系：

$$|H(j\omega)|=\frac{Y}{X}$$

对其取幅角，则是输出相位和输入相位之差随频率的变化关系，称为**相频特性**。

我们需要有时需要过滤一部分频率的信号。比如你在表演节目时，会在调音台上拉高自己的高频、拉低超高频，来让声音变得动听。这就是由各种滤波器实现的。

滤波器类型	**图例**	**分析**	**图象**
低通		电容“通高频阻低频”， 所以频率越高输出电压越低。 截止频率$\omega=\frac{1}{RC}$	
高通		电容“通高频阻低频”， 所以频率越高输出电压越高。 截止频率$\omega=\frac{1}{RC}$	
带通 （RLC串联）		当**阻抗或导纳**（即$\frac{1}{Z}$） 的**虚部为0**时，输出最高， 此时称为**谐振**状态。 谐振频率$\omega_0=\frac{1}{\sqrt{LC}}$	

滤波器中，我们会研究**截止频率**。在这时，输出电压到达了**半功率点**。功率为最大值的一半，故电压为最大值的$\frac{\sqrt{2}}{2}$。如果用分贝来表示，峰值为0分贝的话，那么半功率点就约为$-3dB$.

带通电路中，有两个截止频率ω_1,ω_2。我们可以定义通带宽度$\Delta\omega=\omega_2-\omega_1$。谐振频率与通带宽度的比值称为**品质因数**

$$Q=\frac{\omega_0}{\Delta\omega}$$

还可以等价定义品质因数为谐振时电感（或电容）电压与电源电压之比。

$$Q=\frac{U_L}{U}=\frac{U_C}{U}=\frac{\omega_0 L}{R}=\frac{1}{\omega_0 CR}$$

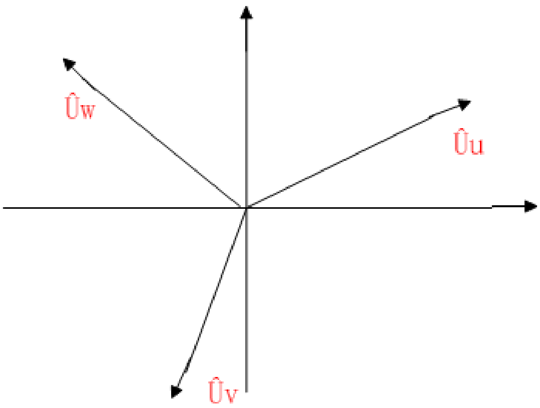
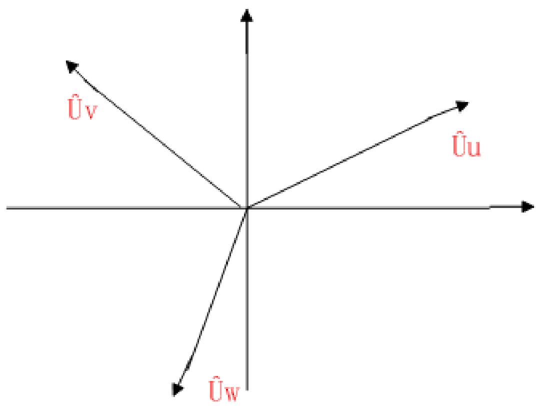
这些公式对串联谐振、并联谐振都可用。特别地，对于串联谐振电路，$Q = \frac{1}{R}\sqrt{\frac{L}{C}}$

三相电路的分析

发电厂为了提升效率，在发电机里放了三组线圈，其物理摆放位置两两相差120°，通过高中物理就很容易理解，他们的相位也是两两差120°。像这样的，三组两两相位相差120°的电源称为三相电源。对于这种电路，我们以相量域为基础，提出了更有针对性的研究方法。

三相电源

这三组交流电源分别被称为是U相，V相，W相。电机正转反转不同，导致**UVW相的电压达到最大值的先后次序**不同，这称为**相序**。做题时不特别指出的话**默认是正相序**。

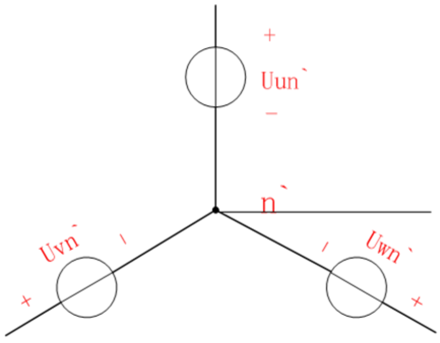
正相序（U-V-W）	负相序 （U-W-V）
$U_U(t) = U_m\cos(\omega t + \varphi)$ $U_V(t) = U_m\cos(\omega t + \varphi - 120^\circ)$ $U_W(t) = U_m\cos(\omega t + \varphi + 120^\circ)$	$U_U(t) = U_m\cos(\omega t + \varphi)$ $U_V(t) = U_m\cos(\omega t + \varphi + 120^\circ)$ $U_W(t) = U_m\cos(\omega t + \varphi - 120^\circ)$
 U比V超前120°，V比W超前120°	 U比V滞后120°，V比W滞后120°
$\dot{U}_W = \dot{U}_U \underline{/120^\circ}$ $\dot{U}_V = \dot{U}_U \underline{/240^\circ}$	$\dot{U}_V = \dot{U}_U \underline{/120^\circ}$ $\dot{U}_W = \dot{U}_U \underline{/240^\circ}$

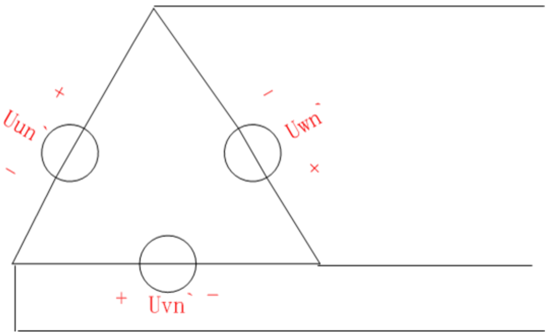
> 无论哪种相序、什么连接方式，都满足
>
> $$U_U^2 + U_V^2 + U_W^2 = \text{常数}$$

连接方式

三相电路中有三相电源，一般都会连接三相负载。对于**电源**和**负载**，我们都分别可以采用**星形（Y形，T形）连接**和**三角形（Δ形，π形）连接**两种方式。两两组合，就有四种常见的电源-负载连接方式：**Y-Y，Y-Δ，Δ-Y，Δ-Δ。**

下面以电源为例解释Y形连接和Δ形连接。、



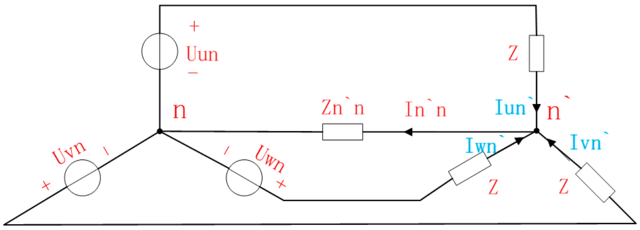
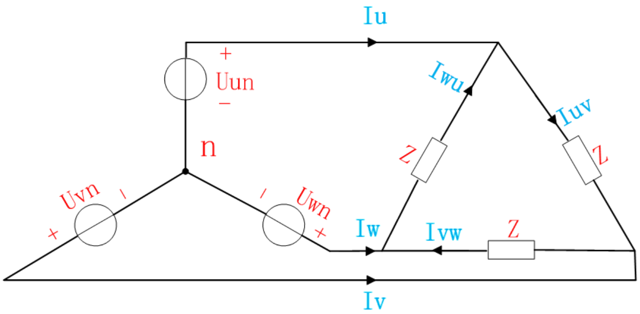
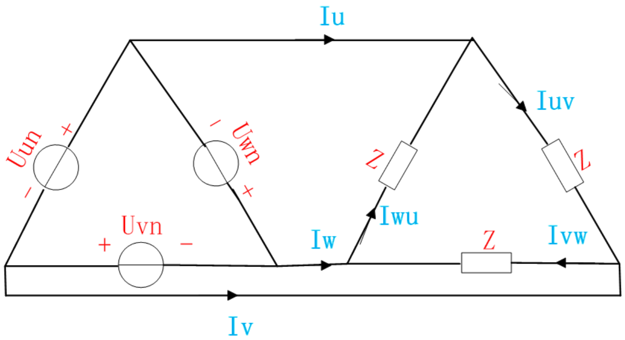
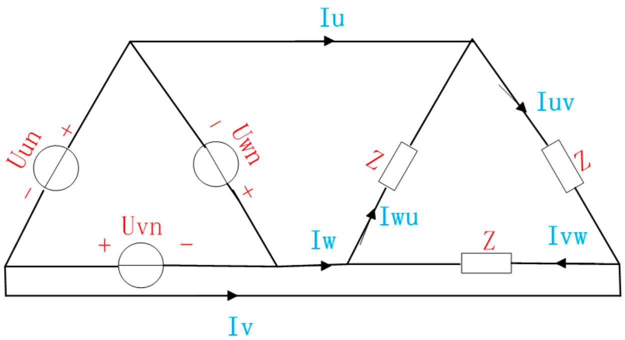


左图是Y形连接，中间点称为**中点**，可以引出一根线称为**中线**。其余三根连接三根火线。右图是三角形连接，没有中点和中线，从三个三角形的顶点引出了三根火线。

> 线电压(U_L)：两根**火线**之间的电压。
> 线电流(I_L)：**火线**上流过的电流。
> 相电压(U_P)：**电源或负载**上各相的电压。
> 相电流(I_P)：**电源或负载**上各相的电流。
> (L for Line. P for Phase.)

对称连接方式分析

本节我们分析的都是对称负载（即三个负载的阻抗相等）。

连接方式	分析
对称Y-Y连接 	$\dot{U}_{NN'}=0, \quad \dot{I}_{NN'}=0$ 理想情况下可省略中线。 $U_L=\sqrt{3}U_p$ $I_L=I_P$
对称Y-Δ连接 	$U_L=U_p$ $I_L=\sqrt{3}I_P$
对称Δ-Δ连接 	$U_L=U_p$ $I_L=\sqrt{3}I_P$
对称Δ-Y连接 	$U_L=\sqrt{3}U_p$ $I_L=I_P$

从上面四组连接中我们可总结出规律：$\frac{U_L}{U_P}$和$\frac{I_L}{I_P}$必有一个是1，一个是$\sqrt{3}$。这个$\sqrt{3}$是哪里来的呢？其实，无论是电压还是电流，你都要抓住某个值是**两相之差**这一关系。顶角是120°的等腰三角形底边长是腰长的$\sqrt{3}$倍，且与两个腰夹角为30°。

于是可以总结，**线电压和相电压，线电流和相电流的关系**：（若时间紧就只记这个表）

负载或电源	电压	电流
Y形连接	$\begin{cases}\dot{U}_L=\sqrt{3}\dot{U}_P\underline{/30^\circ} & ,正相序\\ \dot{U}_L=\sqrt{3}\dot{U}_P\underline{/-30^\circ} & ,负相序\end{cases}$	$I_L=I_P$
Δ形连接	$U_L=U_P$	$\begin{cases}\dot{I}_L=\sqrt{3}\dot{I}_P\underline{/-30^\circ} & ,正相序\\ \dot{I}_L=\sqrt{3}\dot{I}_P\underline{/30^\circ} & ,负相序\end{cases}$ (参考方向：I_U流入节点，I_{UV}流出节点，三角形内电流参考方向相同)

其中，$\dot{U}_L,\dot{I}_L$角标第一个字母相同。如$U_{UV}=\sqrt{3}\dot{U}_{UN}\underline{/30^\circ}$

Y形和Δ形连接的互相等效

对于电源和负载，Y形和Δ形连接都可以互相等效，这简化了计算。

电源等效

电源	等效电源
Y形→Δ形	$\begin{cases}\dot{U}_{UV}=\sqrt{3}\dot{U}_{UN}\underline{/30^\circ} & ,正相序\\ \dot{U}_{UV}=\sqrt{3}\dot{U}_{UN}\underline{/-30^\circ} & ,负相序\end{cases}$
Δ形→Y形	$\begin{cases}\dot{U}_{UN}=\frac{\sqrt{3}}{3}\dot{U}_{UV}\underline{/-30^\circ} & ,正相序\\ \dot{U}_{UN}=\frac{\sqrt{3}}{3}\dot{U}_{UV}\underline{/30^\circ} & ,负相序\end{cases}$

看起来很眼熟对吧？其实就是来自于上上个表格所说的Y形连接的线、相电压关系。根据**电源等效前后线电压不变**，就可以从“Y形电源的线电压”推出“如果这是个Δ形电源，相电压应该是多少”，也就是上面表格中“Y形→Δ形”等效的电压变换公式是怎么来的。

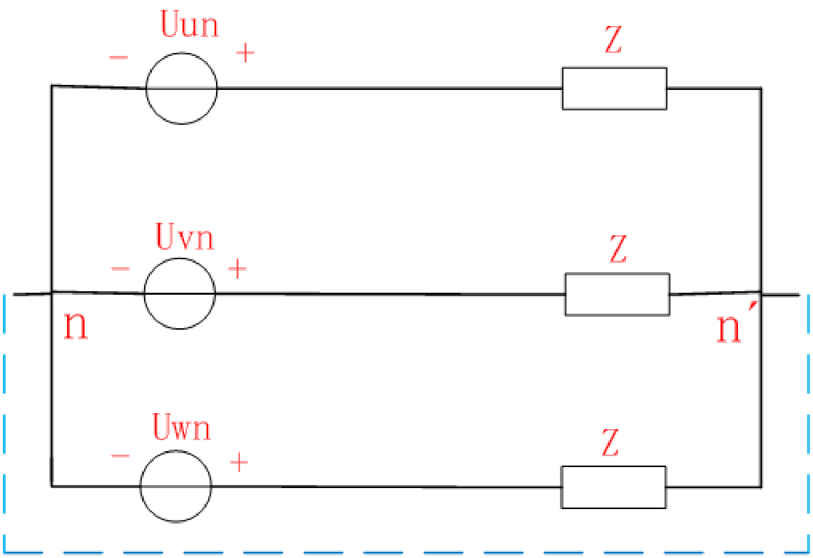
负载等效

负载也可以在Y形和Δ形中来回等效。

如何等效	通式	对称负载时
Δ-Y（常用）	$Z_1=\frac{Z_{13}Z_{12}}{Z_{12}+Z_{13}+Z_{23}}$	$Z_1=Z_2=Z_3=\frac{Z_{ij}}{3}$
Y-Δ	$Z_{12}=\frac{Z_1Z_2+Z_2Z_3+Z_1Z_3}{Z3}$	$Z_{12}=Z_{23}=Z_{13}=3Z_i$

解题法

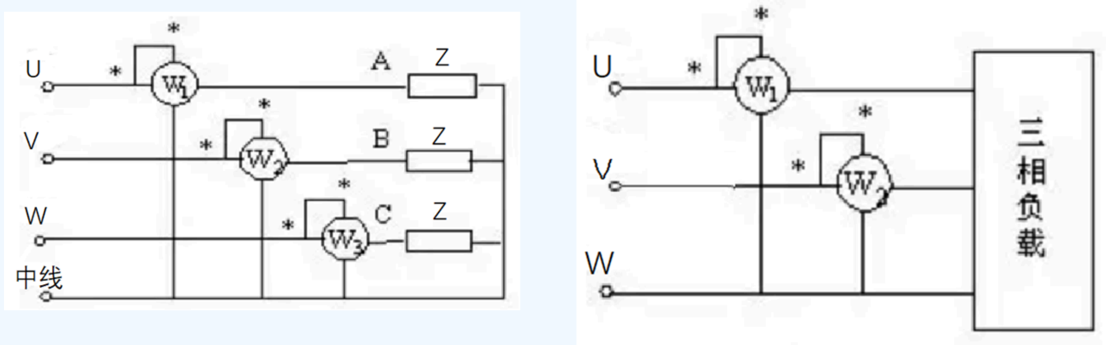
必备知识已经足够，现在可以解三相电路了。对于**非对称**三相电路，上面说的可以全当放屁，用你的相量老老实实节点法列方程吧。但是对于**对称**三相电路，就可以遵循下面的步骤：



1. 将**电源**和**负载**都转化为**Y形连接**。
2. 由于对称电路Y形电路Unn′=0 ,中线有无不影响求解，故我们人为添加一条中线(上图蓝线)。
3. 任选一相和中线构成的回路求解(如下图选了U相)。
4. 剩余两条回路按照120°的相位关系推出答案。
5. 若有要求你算原始电路的三角形负载的相电流、相电压，则根据上一小段*线电压和相电压，线电流和相电流的关系*表格来进行转化。

三相功率测量

三相电路中，我们可以用**三瓦计法**和**二瓦计法**测量其功率。



三瓦计法（左图）： $P = P_1 + P_2 + P_3$

二瓦计法（右图）： $P = P_1 + P_2$

有时他会把功率表乱接。无论他用什么乱七八糟的接法，都离不开这一基本分析方式：
功率表（瓦特计）的上下端口测量的是电压，左右端口测量的是电流。接下来用下列公式计算有功功率：

$$P = \mathrm{Re}(\dot{U}\bar{\dot{I}}) = UI\cos\theta_Z = \vec{U} \cdot \vec{I}$$

还可以推出一个有意思的结论（二瓦计法计算对称负载阻抗角）：

$$
\begin{gathered}
P_1 + P_2 = P \\
\sqrt{3}(P_1 - P_2) = Q \\
\Rightarrow \theta = \arctan\frac{Q}{P} = \arctan\sqrt{3}\frac{P_1 - P_2}{P_1 + P_2}
\end{gathered}
$$

非正弦周期稳态电路

若输入为周期信号但是不是周期信号，这种稳态电路的分析求解就要麻烦一些了。本章并非考试的重点。由高数知识，我们可以把满足*Dirichlet*条件的函数进行傅里叶变换，写成傅里叶级数的形式：

$$f(t) = A_0 + \sum_{k=1}^{\infty} C_{mk}\cos(k\omega t + \varphi_k)$$

A_0称为直流分量，其余正弦项称为谐波分量。

我们可以分别在相量域中研究每一个频率的响应，再进行时域的叠加。

本章需要记住的两个公式是：

$$\text{电流/电压有效值}F = \sqrt{A_0^2 + C_1^2 + C_2^2 + \ldots} \quad (\text{其中}C_i = \frac{C_{mi}}{\sqrt{2}}\text{为各个谐波的有效值})$$

$$\text{平均功率}P = P_1 + P_2 + P_3 + \ldots(\text{其中每一个}P_i\text{为对应直流/谐波分量的平均功率})$$

后记

dyj祝大家考出好成绩！也希望你看完后在传承上给俺点个赞！

但是不要把其拿去据为己有或者售卖什么的，不然我会伤心的。